Statistiques. Exam n°2

Exercice 1

19

on définit T tel que $T \sim \mathcal{N}(0,1)$

Soit : $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$ avec $\begin{cases} m = 176{,}6 \\ \sigma = \sqrt{46{,}85} \end{cases}$

car on a fait l'hypothèse H_0

On fait l'hypothèse $H_0 : X \sim \mathcal{N}(176{,}6\ ;\ \sqrt{46{,}85})$

	Classe de X	Effectif observé	Classe de T	Effectif calculé
Cl_1	$]152{,}5\ ;\ 157{,}5]$	6	$]-3{,}52\ ;\ -2{,}79]$	0,95
Cl_2	$]157{,}5\ ;\ 162{,}5]$	5	$]-2{,}79\ ;\ -2{,}06]$	6,76
Cl_3	$]162{,}5\ ;\ 167{,}5]$	21	$]-2{,}06\ ;\ -1{,}33]$	28,5
Cl_4	$]167{,}5\ ;\ 172{,}5]$	66	$]-1{,}33\ ;\ -0{,}60]$	72,3
Cl_5	$]172{,}5\ ;\ 177{,}5]$	111	$]-0{,}60\ ;\ 0{,}13]$	109,9
Cl_6	$]177{,}5\ ;\ 182{,}5]$	119	$]0{,}13\ ;\ 0{,}86]$	100,3
Cl_7	$]182{,}5\ ;\ 187{,}5]$	51	$]0{,}86\ ;\ 1{,}59]$	55,0
Cl_8	$]187{,}5\ ;\ 192{,}5]$	15	$]1{,}59\ ;\ 2{,}32]$	18,1
Cl_9	$]192{,}5\ ;\ 197{,}5]$	2	$]2{,}32\ ;\ 3{,}05]$	3,5

3/

pour Cl_1 : $p(X \in]152{,}5\ ;\ 157{,}5]) = p(-3{,}52 < T \leq -2{,}79)$

$= p(T \leq -2{,}79) - p(T \leq -3{,}52)$

$= p(T \geq 2{,}79) - p(T \geq 3{,}52)$

$= [1 - p(T < 2{,}79)] - [1 - p(T \leq 3{,}52)]$

$= p(T \leq 3{,}52) - p(T \leq 2{,}79)$

$= (1 - 233.10^{-6}) - 0{,}99736$

$= 2{,}04.10^{-3}$

Même méthode pour Cl_2, Cl_3, Cl_4

Donc l'effectif est $396 \times 2{,}04.10^{-3}$

Pour Cl_5 : $p(X \in Cl_5) = p(T \leq 0{,}6) + p(T \leq 0{,}13) - 1$

Pour Cl_6, Cl_7, Cl_8, Cl_9 : $p(X \in Cl_6) = p(T \leq 0{,}86) - p(T \leq 0{,}13)$

Pour calculer χ^2, on fait $\frac{(\text{effectif calculé} - \text{effectif observé})^2}{\text{effectif calculé}}$ pour chaque classe.

1

2) Les effectifs des ces 2 classes sont très faibles : la moindre variation par rapport à la loi normale étant élevée au carré, elle est très grande par rapport à l'effectif calculé. La différence est donc beaucoup trop amplifiée.

En regroupant les classes, on obtient des effectifs plus représentatifs de la réalité

on a donc

	observé : O_i	calculé C_i
Cl_{1-2}	11	7,71
Cl_3	21	28,5
Cl_4	66	72,3
Cl_5	111	109,9
Cl_6	119	100,3
Cl_7	51	55,0
Cl_8-Cl_9	17	21,6

$$\chi^2_{\text{calculé}} = \sum_{Cl_i = Cl_{1-2}}^{Cl_{8-9}} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$$

$$= 1,40 + 1,97 + 0,55 + 0,01 + 3,49 + 0,29 + 0,98$$

$\chi^2_{\text{calculé}} = 8,69$

2

Dans la table du χ^2, on a : 7 cas − 1 − 0 param. estimé soit 6 degrés de liberté.

1,5

A 5% d'erreur, on lit $\chi^2_{lu} = \cancel{12,59}$

$\chi^2_{\text{calculé}} < \chi^2_{lu} \Rightarrow$ Le test accepte H_0 : "la taille des pièces suit $\mathcal{N}(176,6 ; \sqrt{46,85})$", au risque de 5%.

Exercice 2

Pour chaque candidat :

- On définit X la variable aléatoire telle que

$X=1 \iff$ "Ce candidat est reçu"

$X=0 \iff$ "Ce candidat n'est pas reçu"

- On définit Y la variable aléatoire telle que

$Y=1 \iff$ "Ce candidat avait suivi la préparation"

$Y=0 \iff$ "Ce candidat n'avait pas suivi la préparation"

On a donc les résultats suivants. Les O_{ij} représentent le nombre de candidats se trouvant dans le cas considéré. (effectif observé)

O_{ij}	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$135-45=90$	45
$Y=1$	$92-37=55$	37

On réalise un test d'indépendance utilisant la loi du χ^2.
[On teste l'indépendance des variables X et Y]

Ho ?

On calcule les effectifs attendus : C_{ij}

C_{ij}	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	$\frac{(90+45)(90+55)}{90+45+55+37}$	$\frac{(90+45)(45+37)}{N}$
$Y=1$	$\frac{(90+55)(55+37)}{N}$	$\frac{(55+37)(37+45)}{N}$

Soit

C_{ij}	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	86,23	48,76
$Y=1$	58,77	33,23

$N = 90+45+55+37$

$$\chi^2_{calculé} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{(O_{ij}-C_{ij})^2}{C_{ij}} = 0,16 + 0,29 + 0,24 + 0,43$$

$\chi^2_{calculé} = 1,12$

On lit le χ^2 dans la table avec :

$\alpha = 5\%$

$(2-1) \times (2-1) = 1$ degré de liberté.

(En effet X et Y ont toutes deux 2 valeurs possibles)

$\chi^2_{lu} = 3,841$

On constate que $\chi^2_{calculé} < \chi^2_{lu}$

Donc le test affirme, au risque de 5%, que les variables X et Y sont indépendantes.

Suivre ou non la préparation n'a donc aucun effet sur la réussite des candidats.

3

Ce que ce calcul ne précise pas, c'est que les élèves qui ont suivi la préparation et qui ont été reçus n'auraient peut-être pas été reçus s'ils n'avaient pas suivi la préparation, car leur niveau aurait peut-être été trop faible. Pour tester réellement l'efficacité de la préparation, il faudrait comparer les résultats avec ceux d'une année précédente où il n'existait pas de préparation.

Exercice 3

Les effectifs théoriques découlant de l'hypothèse "le dé est non pipé" suivent une loi uniforme : chaque cas est équiprobable.

On a donc théoriquement $\frac{100}{6} = 16,7$ apparitions de chaque valeur.

On fait l'hypothèse que les résultats des jets de dé suivent une loi uniforme

face i	1	2	3	4	5	6
Effectif observé O_i	15	18	20	17	12	18
Effectif calculé C_i	16,7	16,7	16,7	16,7	16,7	16,7

On quantifie l'écart entre les résultats théoriques et les résultats observés en calculant le $\chi^2_{calculé}$.

$$\chi^2_{calculé} = \sum_{i=1}^{6} \frac{(O_i - C_i)^2}{C_i}$$

$$= 0,17 + 0,10 + 0,65 + 5,39.10^{-3} + 1,32 + 0,10$$

$$\chi^2_{calculé} = 2,35$$

On lit le χ^2_{lu} à ne pas dépasser avec un risque de 5% et un degré de liberté de 6 cas - 1 - 0 paramètres estimés soit 5 degrés de liberté.

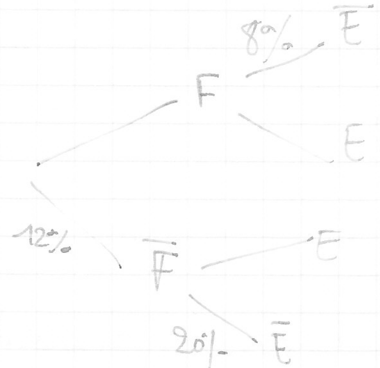
Alors $\chi^2_{lu} = 11,07$

On remarque que $\chi^2_{calculé} < \chi^2_{lu}$

3

On accepte donc l'hypothèse "le résultat des lancers suit une loi d'équiprobabilité" au risque de 5 %

Exercice 4



1°) 12 % des véhicules ont des freins défectueux $\Rightarrow p(\overline{F}) = 0,12$

Donc $p(F) = 1 - p(\overline{F}) = 0,88$

$p(F) = 0,88$

$p_{\overline{F}}(\overline{E}) = 0,2$

$p_F(\overline{E}) = 0,08$.

1

2.a) On demande $p(\overline{F} \cap \overline{E}) = p(\overline{F}) \times p_{\overline{F}}(\overline{E})$

$= 0,12 \times 0,2$

$p(\overline{F} \cap \overline{E}) = 2,4\,\%$

2.b) On demande $p(F \cap \overline{E}) = p(F) \times p_F(\overline{E})$

1

$= 0,88 \times 0,08$

$p(F \cap \overline{E}) = 7,04\,\%$

$p(\overline{E}) = p\left((\overline{E}\cap\overline{F}) \cup (\overline{E}\cap F)\right)$

$= p(\overline{E}\cap\overline{F}) + p(\overline{E}\cap F)$

car les 2 évènements sont incompatibles

D'où $p(\overline{E}) = 2,4\% + 7,04\% = 9,44\%$

3°) On demande $p_{\overline{E}}(\overline{F})$

Or $p(\overline{E}\cap\overline{F}) = p(\overline{E}) \times p_{\overline{E}}(\overline{F})$

$\Rightarrow p_{\overline{E}}(\overline{F}) = \dfrac{p(\overline{E}\cap\overline{F})}{p(\overline{E})}$

$= \dfrac{2,4\%}{9,44\%}$

1

$p_{\overline{E}}(\overline{F}) = 25,4\%$

4. a.) On demande $p(F\cap E) = p(F) \times p_F(E)$

$= 88\% \times 92\%$

$p(F\cap E) = 80,96\%$

1

ou $p(F\cap E) = 0,8096$

4.b) L'expérience décrite suit une loi de Bernoulli. La Variable aléatoire X compte le nombre de succès.

Une épreuve ne peut aboutir qu'à 2 issues : le succès ou l'échec

- "le véhicule arrêté est conforme" correspond à l'échec de l'épreuve
- "le véhicule arrêté est non conforme" correspond au succès de l'épreuve

On répète 20 fois cette épreuve.
Les différentes épreuves sont :
- identiques : car chaque véhicule a la même probabilité $p = 1 - 0{,}8096 = 0{,}1904$ d'être non conforme
- indépendantes, car le tirage est assimilable à un tirage avec remise, puisque le nombre de véhicules disponibles pour le tirage est très grand.

Les paramètres de cette loi sont : $p = 0{,}1904$
$n = 20$ tirages.

On suit donc $B(0{,}1904 ; 20)$

La probabilité complémentaire est : "tous les véhicules sont conformes", soit

$$p(X \geq 1) = 1 - p(X=0)$$
$$= 1 - (1-p)^n$$
$$= 1 - 0{,}8096^{20}$$

1

$$\underline{p(X \geq 1) = 0{,}985}$$

Exercice 5

1°) $\overline{X} \sim \mathcal{N}\left(m, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

1

On estime m et σ grâce à l'échantillon, en supposant que les résultats sont ceux du centre de chaque classe.

On trouve $m = 132{,}75$

$\sigma = 14{,}91$ pour l'échantillon

soit $\sigma = 14{,}91 \sqrt{\frac{n+1}{n}} = 14{,}91 \sqrt{\frac{81}{80}}$

Soit $\underline{\sigma = 15}$ estimé pour la population

Cet échantillon est de taille suffisante pour pouvoir considérer qu'il représente correctement la population.

On fait l'hypothèse H_0 : $m = 135$

avec l'hypothèse contraire H_1 : $m \neq 135$

On définit une région d'acceptation $R_0 = [m-a\ ;\ m+a]$ telle que $p(m-a \leq \bar{X} \leq m+a) = 0,95$; pour que la détermination du $\bar{x}$ d'un échantillon permette de conclure avec un risque de 5%.

Or, sous H_0 : $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(135\ ;\ \frac{15}{\sqrt{80}}\right)$: $\bar{X} \rightsquigarrow \mathcal{N}(135\ ;\ 1,68)$

9,5

~~Donc~~ on cherche $p(135-a \leq \bar{X} \leq m+a) = 0,95$

On définit $Z = \frac{\bar{X}-m}{\sigma} = \frac{\bar{X}-135}{1,68}$

alors il faut que $p\left(\frac{-a}{1,68} \leq Z \leq \frac{a}{1,68}\right) = 0,95$

$\rightarrow 2\,p\left(Z \leq \frac{a}{1,68}\right) - 1 = 0,95$

$p\left(Z \leq \frac{a}{1,68}\right) = 0,975$

Soit $\frac{a}{1,68} = 2,81$

$\rightarrow a = \cancel{4,71}$

Soit $R_0 = [130,29\ ;\ 139,71]$

Ici, sur l'échantillon $\bar{x} = 132,75$

1

Donc $\bar{X} \in R_0$. On accepte donc, au risque de 5%, l'hypothèse "la longueur moyenne de toutes les pièces au moment du prélèvement de l'échantillon est de 135".

12/12/2008
Promo ECAM

Consignes relatives au devoir: Durée : 2H

Documents Autorisés : ☑ Oui ☐ Non Si oui, type de document : tables numériques et calculatrices

---

Exercice 1 :

Lors d'une enquête sur la longueur d'une pièce métallique, on a demandé la taille X de 396 pièces. Un résumé de l'information est le suivant :

Classe	Effectif
]152,5;157,5]	6
]157,5;162,5]	5
]162,5;167,5]	21
]167,5;172,5]	66
]172,5;177,5]	111
]177,5;182,5]	119
]182,5;187,5]	51
]187,5;192,5]	15
]192,5;197,5]	2
Total	396

Nous aimerions tester l'hypothèse suivant laquelle, la distribution de la taille des pièces est une loi normale d'espérance 176.60 et de variance 46.85. Pour cela, nous allons mettre en oeuvre un test du khi-deux.

1. Dresser le tableau des effectifs observés et des effectifs théoriques.
2. Expliquer pourquoi on a intérêt à regrouper les deux premières classes et les deux dernières classes.
3. En choisissant un seuil α = 5%, le test du khi-deux refuse-t-il le fait que la distribution de la taille des pièces soit une loi normale d'espérance 176.60 et de variance 46.85 ?

nej nes
p( )+p( ) -1

Exercice 2 :

(X-p)±p -1

Dans le but de tester l'efficacité d'une préparation à un concours interne de l'éducation nationale, on réalise l'enquête suivante :
Sur 135 candidats inscrits à ce concours et n'ayant pas suivi la préparation, 45 ont été reçus.
Sur 92 candidats inscrits à ce concours et ayant suivi la préparation, 37 ont été reçus.
Peut-on considérer au risque d'erreur de 5%, que cette préparation a eu un effet bénéfique sur la réussite des candidats ?

Exercice 3 :

Sur 100 jets d'un dé, on a obtenu 15 fois le nombre 1, 18 fois le nombre 2, 20 fois le nombre 3, 17 fois le nombre 4, 12 fois le nombre 5 et 18 fois le nombre 6.
En utilisant le test d'adéquation du khi deux, tester au niveau 5%, l'hypothèse selon laquelle le dé est non pipé (c'est-à-dire équiprobabilité des résultats).

Exercice 4 :

Des enquêtes effectuées sur des véhicules circulant en France ont montré que :
12% des véhicules ont des freins défectueux ;
parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20% ont un éclairage défectueux ;
parmi les véhicules ayant de bons freins, 8% ont un éclairage défectueux ;

On effectue, au hasard, des contrôles de véhicules.
On note : E l'événement : « le véhicule contrôlé a un bon éclairage »
F l'événement : « le véhicule contrôlé a de bons freins »
On donnera chaque résultat arrondi par défaut à 10^{-4} près.

1- Donner les probabilités de F, de $\overline{E}$ sachant que $\overline{F}$ est réalisé, puis de $\overline{E}$ sachant que F est réalisé.

2-
  a. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait des freins défectueux et un éclairage défectueux.
  b. Calculer la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait de bons freins et un éclairage défectueux.
  c. En déduire la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux.

3- On contrôle un véhicule ayant un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux ?

4-
  a. Montrer que la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé soit en bon état (c'est-à-dire ait de bons freins et un bon éclairage) est 0,8096.
  b. Au cours d'un contrôle de sécurité, on arrête 20 véhicules. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait, parmi ces véhicules, au moins un véhicule qui ne soit pas en bon état ?

12/12/2008
Promo ECAM

Exercice 5 :

On effectue un contrôle de longueur de pièces sur un échantillon de 80 pièces que l'on assimile à un échantillon obtenu par prélèvement aléatoire et avec remise dans la population constituée de toutes les pièces. On obtient les résultats suivants :

Longueur des pièces	Effectif
$[90;100[$	3
$[100;110[$	4
$[110;120[$	7
$[120;130[$	15
$[130;140[$	26
$[140;150[$	15
$[150;160[$	10

On note m et σ la moyenne et l'écart type des pièces de l'ensemble de la population considérée.
On suppose que la variable aléatoire X qui associe la longueur d'une pièce suit la loi normale de paramètre m et σ.
On note $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n=80 prélevé comme celui-ci, associe sa longueur moyenne.

1- Donner la loi de $\overline{X}$.
2- Construire un test permettant de décider si au seuil de 5% la longueur moyenne de toutes les pièces est égale à 135.
3- Utiliser ce test avec l'échantillon de l'énoncé.